DEVOIR SURVEILLÉ

1 Les questions **1)** à **4)** suivantes sont indépendantes.

1) Simplifier $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{2i-1}{j}$ et $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{2i-1}{j}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. On tâchera d'écrire le produit sous la forme $\frac{p}{2^m}$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $m\in\mathbb{N}$.

2) Déterminer une expression explicite de la famille $(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ définie par $a_{i,0}=i$ et $a_{i,j+1}=\frac{a_{i+1,j}}{j+3}$ pour tous $i,j\in\mathbb{N}$. On rédigera d'abord sur la copie un calcul à base de points de suspension, puis on prouvera proprement le résultat par récurrence.

3) **a)** Montrer que pour tout $k\geqslant 2$: $\quad(2k-1)(2k)\geqslant 4k\sqrt{k(k-1)}$.

b) En déduire une minoration de $(2n)!$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, puis l'inégalité : $\quad\binom{2n}{n}\geqslant\frac{2^{2n}}{2\sqrt{n}}$.

On prouvera plus tard dans l'année que $\frac{\sqrt{n}}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ (*formule de Wallis*).

4) Déterminer l'ensemble des fonctions $f:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}$ pour lesquelles $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pour tous $x,y\in\mathbb{Q}$. On pourra commencer par étudier f sur $\mathbb{N}$, puis sur $\mathbb{Z}$.

2

1) Soient $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}^*$. On suppose que le polynôme X^2-aX-b possède deux racines réelles distinctes r et s et on note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Soit $x\in\mathbb{R}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur x la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient-elle à E ?

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$. Montrer qu'il existe un et un seul couple $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ pour lequel $u_n=\lambda r^n+\mu s^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

On appelle *suite de Fibonacci* la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0=0$, $F_1=1$ et $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On pose :

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\qquad\text{et}\qquad\psi=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

2) Trouver explicitement deux réels λ et μ pour lesquels $F_n=\lambda\varphi^n+\mu\psi^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

3) On pose $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}F_kx^k$ pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$.

a) Montrer **SANS** récurrence que pour tous $n\geqslant 2$ et $x\in\mathbb{R}$: $\quad(1-x-x^2)S_n(x)=x-F_{n+1}x^{n+1}-F_nx^{n+2}$.

b) En déduire $\sum_{k=0}^{+\infty}F_kx^k$ pour tout $x\in\left]-\frac{1}{\varphi},\frac{1}{\varphi}\right[$.

---

3 On étudie dans ce problème l'irrationalité de certaines sommes infinies. On admet le *théorème de la limite monotone* selon lequel toute suite croissante majorée converge.

1) Montrer que la somme infinie $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{a^k}$ est bien définie et rationnelle pour tout entier $a\geqslant 2$.

2) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'entiers naturels non nuls de limite $+\infty$. En particulier, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 2 à partir d'un certain rang N. On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_1\dots a_k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tous $n\geqslant N$ et $p\geqslant n+1$: $\quad a_1\dots a_n(S_p-S_n)\leqslant\frac{1}{a_{n+1}-1}$.

b) En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et que si on note ℓ sa limite, alors pour tout $n\geqslant N$:

$$0<a_1\dots a_n(\ell-S_n)\leqslant\frac{1}{a_{n+1}-1}.$$

c) Montrer que $a_1\dots a_nS_n$ est entier pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, puis que ℓ est irrationnel.

3) **a)** Montrer que la somme infinie $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$ est bien définie et irrationnelle.

b) Simplifier $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et en déduire que la somme infinie $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{a^{k^2}}$ est bien définie et irrationnelle pour tout entier $a\geqslant 2$.

c) Montrer que 2^n divise $(2n)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis que la somme infinie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{(2k)!}$ est bien définie et irrationnelle.

On admet à présent que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^x pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ce résultat très classique sera démontré plusieurs fois dans l'année.

En particulier, la fameuse constante $e = e^1$ est irrationnelle d'après **3)a)**.

4) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, puis que $e^{\sqrt{2}}$ est irrationnel.

On pose finalement $\displaystyle S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor kx \rfloor}{k!}$ pour tous $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

5) a) Montrer que $p! \geqslant 2^{p-n}\, n!$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \geqslant n$.

b) En déduire que la suite $\big(S_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge pour tout $x > 0$. On note $\ell(x)$ sa limite.

c) Montrer que $\ell(m)$ est irrationnel pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

6) Soit $x \in \mathbb{R}_+^* \smallsetminus \mathbb{N}^*$.

a) En exploitant le résultat de la question **5)a)**, montrer que pour tous $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \geqslant a$: $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{2}{a!}$.

b) Trouver deux réels m et M pour lesquels pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \geqslant n+1$:

$$x - \frac{m}{n+1} \leqslant n!\,\big(S_p(x) - S_n(x)\big) \leqslant x + \frac{M}{n+1}.$$

c) En déduire que $\ell(x)$ est irrationnel.

7) a) Montrer que la fonction $x \longmapsto \ell(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire que la fonction $x \longmapsto \ell(x)$ est *injective sur* $\mathbb{R}_+^*$, i.e. que :

$$\forall x, x' > 0, \qquad \ell(x) = \ell(x') \implies x = x'.$$

Ainsi, la fonction $x \longmapsto \ell(x)$ est injective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^* \smallsetminus \mathbb{Q}_+^*$. Si vous y réfléchissez un peu, cela signifie qu'il y a autant d'éléments dans $\mathbb{R}_+^* \smallsetminus \mathbb{Q}_+^*$ que dans $\mathbb{R}_+^*$, autrement dit autant d'irrationnels que de réels !

---

4 (Cet exercice n'est pas prioritaire et sera moins rémunéré que les précédents. Seulement si vous avez très bien réussi le reste !)

Pour toutes parties $A, B \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, on pose $A+B = \Big\{a+b \mid \quad a \in A, \quad b \in B\Big\}$. Par exemple, $\{1,2\} + \{0,3,4\} = \{1,2,4,5,6\}$. On admet que pour tous $A, B, C \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$: $\quad A+B = B+A \quad$ et $\quad (A+B)+C = A+(B+C)$. On s'intéresse dans cet exercice à l'addition des parties finies non vides de $\mathbb{N}$, dont on note $\mathscr{P}$ l'ensemble.

1) Pour tout $A \in \mathscr{P}$, on note $\min A$ le plus petit élément de A et $\max A$ son plus grand élément. Montrer que pour tous $A, B \in \mathscr{P}$: $\quad \min(A+B) = \min A + \min B$. On montre de même que $\max(A+B) = \max A + \max B$ et on l'admet.

2) Pour tous $A, B \in \mathscr{P}$, on dit que $A \preccurlyeq B$ si $B = A + A'$ pour un certain $A' \in \mathscr{P}$.

a) Soient $A, E \in \mathscr{P}$. On suppose que $A + E = A$. Montrer que $E = \{0\}$.

b) Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}$.

c) Comparer $\min A$ et $\min B$ pour tous $A, B \in \mathscr{P}$ pour lesquels $A \preccurlyeq B$, puis de même $|A|$ et $|B|$. La relation $\preccurlyeq$ est-elle totale ?

3) Soient $A, B \in \mathscr{P}$ deux parties pour lesquelles $A \preccurlyeq B$. On pose :

$$\mathscr{E}(A,B) = \Big\{A' \in \mathscr{P} \mid \quad B = A + A'\Big\} \qquad \text{et} \qquad B \ominus A = \Big\{n \in \mathbb{N} \mid \quad A + n \subset B\Big\} \qquad \text{où } A + n = A + \{n\}.$$

a) Montrer que pour tous $A' \in \mathscr{E}(A,B)$: $\quad A' \subset B \ominus A$.

b) Montrer que $B \ominus A \in \mathscr{E}(A,B)$.

Les résultats des questions **a)** et **b)** montrent que $B \ominus A$ est le plus grand élément de $\mathscr{E}(A,B)$ au sens de l'inclusion.

c) Montrer que les éléments de $\mathscr{E}(A,B)$ ont tous le même minimum et le même maximum.

4) Montrer que pour tous $U, V \in \mathscr{P}$:

$$\min U = \min V \ \text{ et } \ \max U = \max V \qquad \iff \qquad \exists A, B \in \mathscr{P}, \quad U \in \mathscr{E}(A,B) \ \text{ et } \ V \in \mathscr{E}(A,B).$$

On pourra chercher A sous la forme d'un ensemble $[\![0, n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}$.
